## 2.9.25 Logaritmické nerovnice II

**Př. 1:** Vyřeš nerovnici $3\log_3^2 x - 27\log_3 x \geq \log_3 x - 9$.

**Substituce:** $y = \log_3 x$  $3y^2 - 27y \geq y - 9$  $3y^2 - 28y + 9 \geq 0$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4\cdot 3\cdot 9}}{2\cdot 3} = \frac{28 \pm 26}{6} \quad y_1 = 9 \qquad y_2 = \frac{28-26}{6} = \frac{1}{3}$$

Hledáme části grafu nad osou $\Rightarrow$ $y \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 9; \infty)$.

| | |
|---|---|
| $\log_3 x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 9;\infty) \Leftrightarrow y = \log_3 x \leq \frac{1}{3}$ nebo $y = \log_3 x \geq 9$ | |
| $\log_3 x \leq \frac{1}{3}$  $\log_3 x \leq \log_3 3^{\frac{1}{3}}$  $x \leq \sqrt[3]{3}$<br>$\left(-\infty; \sqrt[3]{3}\right\rangle$, $x > 0$ $\Rightarrow$ $K_1 = \left(0; \sqrt[3]{3}\right\rangle$. | $\log_3 x \geq 9$  $\log_3 x \geq \log_3 3^9$  $x \geq 3^9$<br>$\langle 3^9; \infty)$, $x > 0$ $\Rightarrow$ $K_2 = \langle 3^9; \infty)$. |

$K = K_1 \cup K_2 = \left(0; \sqrt[3]{3}\right\rangle \cup \langle 3^9; \infty)$

**Př. 2:** Vyřeš nerovnici $\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2) - 16 < 0$.

Podmínky: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$.  $\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2) - 16 < 0$

**Substituce:** $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$  $y^2 - 16 = 0$  $(y-4)(y+4) = 0$  $y \in (-4;4)$.

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = y \in (-4;4)$

| | |
|---|---|
| $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \in (-4;4) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-2) > -4$ a zároveň $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < 4$. | |
| $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > -4$  $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$<br>$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}} 16$  $x - 2 < 16$<br>$x < 18$  $K_1 = (2;18)$ - podmínka $x > 2$ | $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < 4$  $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4$<br>$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}$  $x - 2 > \frac{1}{16}$<br>$x > \frac{1}{16} + 2 = \frac{33}{16}$  $K_2 = \left(\frac{33}{16}; \infty\right)$ |

Hledáme průnik množin $K_1 = (2;18)$ a $K_2 = \left(\frac{33}{16}; \infty\right)$ $\Rightarrow$ $K = K_1 \cap K_2 = \left(\frac{33}{16}; 18\right)$.

**Př. 3:** Vyřeš nerovnici $|\log x - 1| \leq 2$.

Podmínky: $x > 0$.

**Substituce:** $y = \log x$.  $|y-1| \leq 2$

| | |
|---|---|
| $y \in (-\infty;1\rangle$  $y - 1 \leq 0 \Rightarrow \|y-1\| = -(y-1) = -y+1$ | $y \in \langle 1;\infty)$  $y - 1 \geq 0 \Rightarrow \|y-1\| = y-1$ |
| Řešíme nerovnici: $\|y-1\| \leq 2$. $-y+1 \leq 2$ | Řešíme rovnici: $\|y-1\| \leq 2$. $y-1 \leq 2$  $y \leq 3$ |
| $-1 \leq y$  $\langle -1;\infty)$, $y \in (-\infty;1\rangle$ $\Rightarrow$ $K_1 = \langle -1;1\rangle$. | $y \in (-\infty;3\rangle$, $y \in \langle 1;\infty)$ $\Rightarrow$ $K_2 = \langle 1;3\rangle$. |

$K = K_1 \cup K_2 = \langle -1;3\rangle$

| |
|---|
| $\log x \in \langle -1;3\rangle \Leftrightarrow \log x \geq -1$ a zároveň $\log x \leq 3$ |

| | |
|---|---|
| $\log x \geq -1 \quad \log x \geq \log 10^{-1} \quad x \geq 0{,}1$<br>$K_1 = \langle 0{,}1; \infty)$ | $\log x \leq 3 \quad \log x \leq \log 10^{3} \quad x \leq 1000$<br>$K_2 = (-\infty; 1000\rangle$ |

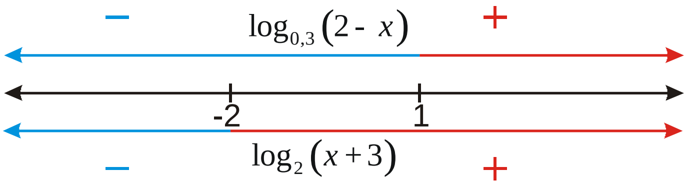
$K = K_1 \cap K_2 = \langle 0{,}1; 1000\rangle$

**Př. 4:** Vyřeš nerovnici $\log_2(x+3) \cdot \log_{0,3}(2-x) > 0$.

Podmínky: $x+3>0 \Rightarrow x>-3$, $2-x>0 \Rightarrow x<2$.

$\log_2(x+3)>0 \quad \log_2(x+3)>\log_2 2^0$ $\qquad$ $\log_{0,3}(2-x)>0 \quad \log_{0,3}(2-x)>\log_{0,3} 0{,}3^0$

$x+3>1 \quad x>-2$ $\qquad$ $2-x<1 \quad x>1$




Součin dvou čísel je kladný, pokud jsou obě čísla kladná nebo obě čísla záporná $\Rightarrow$ zdánlivě jsou kořeny $(-\infty;-2) \cup (1;\infty)$, musíme uplatnit podmínky: $x>-3$, $x<2$ $\Rightarrow$

$K = (-3;-2) \cup (1;2)$.

**Př. 5:** Vyřeš soustavu nerovnic $1 \leq |\log x| \leq 3$.

Podmínky: $x>0$.

**Substituce:** $y = \log x$. $1 \leq |y| \leq 3$

| | |
|---|---|
| $y \in (-\infty;0) \qquad y \leq 0 \Rightarrow |y| = -y \quad 1 \leq -y \leq 3$.<br>$1 \leq -y \Rightarrow -1 \geq y$<br>$-y \leq 3 \Rightarrow y \geq -3 \quad \Rightarrow K_1 = \langle -3;-1\rangle$ | $y \in \langle 0;\infty) \qquad y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$<br>$1 \leq y \leq 3. \Rightarrow K_2 = \langle 1;3\rangle$ |

$$K = K_1 \cup K_2 = \langle -3;-1\rangle \cup \langle 1;3\rangle$$

| | |
|---|---|
| $\log x \in \langle -3;-1\rangle \Leftrightarrow \log x \geq -3$ a zároveň $\log x \leq -1$. | |
| $\log x \geq -3 \quad \log x \geq \log 10^{-3} \quad x \geq 0{,}001$<br>$K_{11} = \langle 0{,}001;\infty)$ | $\log x \leq -1 \quad \log x \leq \log 10^{-1} \quad x \leq 0{,}1$<br>$K_{12} = (-\infty; 0{,}1\rangle$ |

$K_1 = K_{11} \cap K_{12} = \langle 0{,}001; 0{,}1\rangle$

| | |
|---|---|
| $\log x \in \langle 1;3\rangle \Leftrightarrow \log x \geq 1$ a zároveň $\log x \leq 3$. | |
| $\log x \geq 1 \quad \log x \geq \log 10^{1} \quad x \geq 10$<br>$K_{21} = \langle 10;\infty)$ | $\log x \leq 3 \quad \log x \leq \log 10^{3} \quad x \leq 1000$<br>$K_{22} = (-\infty;1000\rangle$ |

Hledáme průnik množin $K_{21} = \langle 10;\infty)$ a $K_{22} = (-\infty;1000\rangle$ .

$K_2 = K_{21} \cap K_{22} = \langle 10;1000\rangle$

Celkový výsledek získáme jako sjednocení z obou intervalů:

$K = K_1 \cup K_2 = \langle 0{,}001;0{,}1\rangle \cup \langle 10;1000\rangle$.

**Př. 6:** Petáková:
strana 38/cvičení 32 d)
strana 38/cvičení 33 d)
strana 38/cvičení 34 b)
strana 38/cvičení 35 c)
strana 38/cvičení 38 d)
strana 39/cvičení 40 c)